

**九州大学大学院数理学府**  
**平成24年度修士課程入学試験**  
**数学専門科目問題 (数理学コース)**

- 注意** • 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10] の中から 1 題を選択して解答せよ.
- 解答用紙は, 問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 1 題分提出すること.
  - 以下  $\mathbb{N}$  は自然数の全体,  $\mathbb{Z}$  は整数の全体,  $\mathbb{Q}$  は有理数の全体,  $\mathbb{R}$  は実数の全体,  $\mathbb{C}$  は複素数の全体を表す.

**[1]** 整数係数の 2 次正方行列

$$g = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を考える.  $M_2(\mathbb{Q})$  により有理数係数の 2 次正方行列全体のなす環を表す.  $GL_2(\mathbb{Q})$  により有理数係数の 2 次正則行列全体のなす群を表す.  $GL_2(\mathbb{Q})$  の中で  $g$  が生成する部分群を  $G$  とする.  $M_2(\mathbb{Q})$  の中で  $g$  が生成する  $\mathbb{Q}$ -代数を  $R$  とする. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) 群  $G$  の位数を求めよ.
- (2) 行列  $g$  の特性多項式を求めよ.
- (3)  $R$  は可換体であることを示せ.
- (4)  $G$  は  $GL_2(\mathbb{Q})$  の部分群であるから, 包含写像

$$\rho: G \rightarrow GL_2(\mathbb{Q})$$

は  $G$  の  $\mathbb{Q}$ -線型表現とみなせる. このとき,  $\rho$  の表現としての自己準同型環

$$\text{End}(\rho) = \{A \in M_2(\mathbb{Q}) \mid A\rho(h) = \rho(h)A, \forall h \in G\}$$

は  $R$  に一致することを示せ.

[2]  $\mathbb{Z}$  を有理整数環とし,  $p$  を素数とする. また,  $\mathbb{Z}$  係数の一変数多項式環を  $\mathbb{Z}[x]$  とする. 以下の問に答えよ.

(1)  $\mathbb{Z}[x]$  の極大イデアルの例を一つあげて, それが極大イデアルであることを示せ.

(2)  $\mathbb{Z}[x]$  の多項式  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$  が

$$a_i \equiv 0 \pmod{p} \quad (0 \leq i \leq n-1)$$

かつ

$$a_0 \not\equiv 0 \pmod{p^2}$$

を満たすとする. このとき  $f(x)$  は  $\mathbb{Z}[x]$  の既約な多項式であることを示せ.

(3)  $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$  は  $\mathbb{Z}[x]$  の既約な多項式であることを示せ.

[3]  $X$  をハウスドルフ空間とする. 以下の問に答えよ.

(1)  $X$  の相異なる  $n$  個の元  $x_1, \dots, x_n$  ( $n \geq 2$ ) に対し, 各  $x_k$  の近傍  $U_k$  で  $U_i \cap U_j = \emptyset$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ) を満たすものが存在することを示せ.

(2)  $C$  を  $X$  のコンパクトな部分集合とする. このとき  $C$  は  $X$  の閉集合であることを示せ.

(3)  $A, B$  が  $X$  のコンパクトな部分集合ならば,  $A \cap B$  も  $X$  のコンパクトな部分集合であることを示せ.

[4]  $(u, v)$  をパラメータとする空間内の曲面  $\mathbf{p}(u, v)$  を次式で定義する.

$$\mathbf{p}(u, v) = \mathbf{q}(u) + v\mathbf{e}(u)$$

ここで,  $\mathbf{q}(u)$  は  $u$  を弧長パラメータとする空間曲線であり,  $\mathbf{e}(u)$  は  $u$  のみに依存する単位ベクトルで,  $\mathbf{q}'(u)$  と  $\mathbf{e}(u)$  は一次独立であるとする. 以下の間に答えよ.

- (1) 曲面  $\mathbf{p}(u, v)$  のガウス曲率  $K$  は  $K \leq 0$  を満たすことを示せ.
- (2)  $K \equiv 0$  であるための必要十分条件は,  $\mathbf{e}'(u)$  が  $\mathbf{q}'(u)$  と  $\mathbf{e}(u)$  の一次結合で表されることである. このことを示せ.
- (3)  $xyz$  空間において,

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{a^2} = 1, \quad a > 0$$

と表される曲面を  $\mathbf{q}(u) + v\mathbf{e}(u)$  の形に表せ.

[5] 円周  $S^1$  と 2次元閉円板  $D^2$  の直積空間  $M = S^1 \times D^2$  について, 以下の間に答えよ.

- (1)  $M$  の整係数ホモロジー群  $H_*(M; \mathbb{Z})$  を求めよ.
- (2)  $M$  の部分空間  $\partial M = S^1 \times \partial D^2$  の整係数ホモロジー群  $H_*(\partial M; \mathbb{Z})$  を求めよ. ただし,  $\partial D^2$  は  $D^2$  の境界である.
- (3) 整係数相対ホモロジー群  $H_*(M, \partial M; \mathbb{Z})$  を求めよ.

[6]  $a$  を正の定数とするとき, 以下の間に答えよ.

- (1)  $R_0$  を正数とする. 複素平面内の領域  $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| > R_0\}$  上の正則関数  $f$  を考える. 次を満たす連続関数  $F: [R_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  が存在すると仮定する.

$$|f(z)| \leq F(|z|) \quad (z \in D), \quad \lim_{R \rightarrow \infty} F(R) = 0$$

複素平面内で原点を中心にもつ半径  $R (> R_0)$  の上半円を反時計回りにまわる路を  $C_R^+ = \{z = Re^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq \pi\}$  とする. この時  $C_R^+$  に沿う線積分について

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} e^{iaz} f(z) dz = 0$$

が成り立つことを証明せよ.

- (2) 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$$

- (3) 実軸上の区間  $[-R, R]$  を  $I_R$  とする. 区間  $I_R$  上を  $-R$  から  $R$  に向かう路に沿う線積分の極限

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{I_R} \frac{e^{iaz}}{\sqrt{z-i}} dz$$

を計算せよ. ここで  $\sqrt{z-i}$  は次のように決めたものである.  $z-i$  の偏角  $\arg(z-i)$  を  $-3\pi/2 \leq \arg(z-i) < \pi/2$  にとり,  $\log(z-i) = \log|z-i| + i\arg(z-i)$  とおき,  $\sqrt{z-i} = e^{\frac{1}{2}\log(z-i)}$  とする. 必要なら

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を用いてもよい.

[7] 以下の問に答えよ.

(1) 次の初期値問題の解  $y(x)$  を求めよ.

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = \cos 2x \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

(2)  $r(t)$  を  $\int_0^\infty |r(t)| dt < \infty$  を満たす連続関数とする.

(i)  $u(t)$  は  $[0, \infty)$  上の有界な連続関数で, 関係式

$$u(t) = \cos t - \int_t^\infty \sin(t-s)r(s)u(s) ds$$

を満たすものとする. このとき

$$u''(t) + u(t) = r(t)u(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - \cos t| = 0$$

が成り立つことを示せ.

(ii)  $[0, \infty)$  上の関数  $g_n(t)$  と  $u_n(t)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) を

$$g_0(t) = \cos t$$

$$g_n(t) = - \int_t^\infty \sin(t-s)r(s)g_{n-1}(s) ds \quad (n \geq 1)$$

$$u_n(t) = g_0(t) + \dots + g_n(t)$$

によって定める. 数学的帰納法を用いて, すべての  $t \geq 0$  に対して

$$|g_n(t)| \leq \frac{1}{n!} \left( \int_t^\infty |r(s)| ds \right)^n$$

が成り立つことを示せ.

(iii) 上の関数列  $\{u_n(t)\}$  は区間  $[0, \infty)$  上で一様収束することを示せ. さらに,  $u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)$  は  $[0, \infty)$  上で有界な連続関数で,

$$u(t) = \cos t - \int_t^\infty \sin(t-s)r(s)u(s) ds$$

を満たすことを示せ.

[8] 次の命題がもし正しいなら○を書いて証明を与えよ。もし誤りなら×を書いて反例をあげよ。

- (1) 測度空間  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  は  $\mu(X) = 1$  を満たすとする。  $X$  の可測集合の列  $A_1, A_2, A_3, \dots$  について、もし任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $\mu(A_n) = 1$  ならば、

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$$

- (2) 実数全体  $\mathbb{R}$  の部分集合の列  $A_1, A_2, A_3, \dots$  について、もし任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $A_n$  が  $\mathbb{R}$  で稠密ならば、  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  も  $\mathbb{R}$  で稠密になる。

- (3) 測度空間  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  において、  $X$  上の可測関数の列  $f_1, f_2, f_3, \dots$  が可測関数  $f$  に各点収束しているとする。もしある定数  $K > 0$  が存在して、任意の  $x \in X$  に対して  $0 \leq f_n(x) \leq K, 0 \leq f(x) \leq K$  となっているならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

- (4) 実数全体  $\mathbb{R}$  上で通常のルベーグ測度空間を考える。可測関数  $K(x) \geq 0$  は  $\int_{\mathbb{R}} K(x) dx = 1$  を満たすとする。実数  $a$  を固定し、正の数  $\varepsilon$  に対し  $K_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} K\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right)$  とおく。もし  $f$  が有界な連続関数ならば、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} K_\varepsilon(x) f(x) dx = f(a)$$

- (5) 測度空間  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  が  $\mu(X) < \infty$  を満たすとする。  $X$  上の可測関数  $f$  と可測関数の列  $f_1, f_2, f_3, \dots$  を考える。もし  $f_n$  が  $f$  に概収束するならば、  $f_n$  が  $f$  に測度収束する。ここで、  $f_n$  が  $f$  に概収束するとは、測度 0 の集合を除いて  $f_n(x) \rightarrow f(x) (n \rightarrow \infty)$  のことであり、  $f_n$  が  $f$  に測度収束するとは、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して

$$\mu(\{x \in X ; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となることである。

[9]  $X$  を  $\{1, 2, \dots, m\}$  に値をとる確率変数とし,

$$p(k; \theta) = P(X = k) \quad (k = 1, 2, \dots, m, \theta \in \Theta)$$

とおく. ここで  $\Theta \subset \mathbb{R}$  は空でない開集合とする.  $p(k; \theta) > 0$  ( $k = 1, 2, \dots, m, \theta \in \Theta$ ) とし, 各  $k = 1, 2, \dots, m$  について  $p(k; \theta)$  は  $\theta$  について微分可能とする. また,  $E_\theta\{\cdot\}$ ,  $V_\theta\{\cdot\}$ ,  $\text{Cov}_\theta\{\cdot, \cdot\}$  はそれぞれ  $X$  の分布  $p(k; \theta)$  に関する期待値, 分散, 共分散とする.  $h(k; \theta) = \frac{d}{d\theta} \log p(k; \theta)$  とおく.  $T$  を  $\{1, \dots, m\}$  上の実数値関数とし,  $g(\theta) = E_\theta\{T(X)\}$  とおく. 以下の問に答えよ.

(1) 任意の  $\theta \in \Theta$  について

$$E_\theta\{h(X; \theta)\} = 0$$

が成り立つことを示せ.

(2) 任意の  $\theta \in \Theta$  について

$$\text{Cov}_\theta\{T(X), h(X; \theta)\} = \frac{d}{d\theta} g(\theta)$$

が成り立つことを示せ.

(3) 各  $\theta \in \Theta$  について  $I(\theta) = V_\theta\{h(X; \theta)\}$  とおく.  $0 < I(\theta) < \infty$  とする. このとき,

$$V_\theta\left\{T(X) - \frac{1}{I(\theta)} \left(\frac{d}{d\theta} g(\theta)\right) h(X; \theta)\right\}$$

を,  $V_\theta\{T(X)\}$ ,  $\frac{d}{d\theta} g(\theta)$ ,  $I(\theta)$  で表せ.

(4)  $g(\theta) \equiv \theta$  のとき, (3) の  $I(\theta)$  に対して

$$V_\theta\{T(X)\} \geq \frac{1}{I(\theta)}$$

が成り立つことを示せ.

[10]  $N$  を自然数とする.  $u = \{u_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  が  $N$  周期格子点関数であるとは,  $u_j \in \mathbb{C}$  で,

$$u_{j+N} = u_j \quad (j \in \mathbb{Z})$$

を満たしているものをいう.  $N$  周期格子点関数  $u$  の離散フーリエ係数  $\hat{u} = \{\hat{u}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  は

$$\hat{u}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_j e^{-2\pi i \frac{jk}{N}}$$

で与えられる. ここで,  $i = \sqrt{-1}$  である. このとき以下の問に答えよ. ただし,  $j, k, \ell$  は整数を表すものとする.

$$(1) \sum_{k=1}^N e^{2\pi i \frac{jk}{N}} = \begin{cases} N & (j \equiv 0 \pmod{N}) \\ 0 & (j \not\equiv 0 \pmod{N}) \end{cases} \text{ を示せ.}$$

$$(2) u_\ell = \sum_{k=1}^N \hat{u}_k e^{2\pi i \frac{\ell k}{N}} \text{ を示せ.}$$

$$(3) \sum_{k=1}^N |\hat{u}_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |u_j|^2 \text{ を示せ.}$$

(4)  $N$  周期格子点関数  $v$  に対し  $-u_{j-1} + 3u_j - u_{j+1} = v_{j-1} - v_j + v_{j+1}$  を満たす  $N$  周期格子点関数  $u$  が一意に存在することを示せ. また, 不等式

$$\sum_{j=1}^N |u_j|^2 \leq \sum_{j=1}^N |v_j|^2$$

が成り立つことを示せ.