九州大学大学院数理学府
2020 年度修士課程入学試験
数学問題（ＭＭＡコース）

注意 ● 問題 [1][2][3][4][5][6] の中から 3 題を選択して解答せよ.
● 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 3 題分提出すること.

[1]　平面上の三角形 $\triangle ABC$ と，その内部の点 $P=(x,y)$ を考える．三角形 $\triangle PCA$，$\triangle PAB$，$\triangle PBC$ の面積比を $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ と定める．ただし $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $A=(0,0)$，$B=(1,0)$，$C=(0,1)$ のとき，$\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ を x, y で表し，

$$\iint_{\triangle ABC} \lambda_1\lambda_2\lambda_3\, dxdy = \frac{1}{120}$$

を示せ．

(2) 頂点 $A=(a_1,a_2)$，$B=(b_1,b_2)$，$C=(c_1,c_2)$ が一般の位置にあるとき，

$$\iint_{\triangle ABC} \lambda_1\lambda_2\lambda_3\, dxdy = \frac{1}{60}\times(\triangle ABC \text{ の面積})$$

を示せ．

[2]　連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $[A\,|\,\boldsymbol{b}]$ に行の基本変形をおこなった結果，以下の簡約な行列が得られた．

(a) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$　(b) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$　(c) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$

以下の問に答えよ．

(1) (a), (b), (c) それぞれの場合について，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の一般解 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_5)^T$ を求めよ．ただし，^{T} は転置記号である．

(2) (a), (b) それぞれの場合について，同次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間の基底と次元を求めよ．

(3) (b) の簡約な行列の第 3 行が零ベクトルであることから得られる知見を述べよ．また，第 3 列が零ベクトルであることから得られる知見を述べよ．

(4) B を n 次の正則行列，I_n を n 次の単位行列とし，行列 $[B\,|\,I_n]$ に行の基本変形をおこなった結果得られる簡約な行列を $[I_n\,|\,C]$ とする．このとき，C は B の逆行列であることを示せ．

[3]　次の常微分方程式を解け．

$$y''(x)-4y(x)=e^{-2x}-2x,$$
$$y(0)=y'(0)=0.$$

[4] X, Y を互いに独立で，同じ確率密度関数 $f(x)$ をもつ連続型確率変数とする．$Z = X + Y$ の確率密度関数を $f_Z(z)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $f_Z(z)$ は次式で与えられることを示せ．

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(z-x) dx$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

のとき，$f_Z(z)$ を求めよ．

[5] 関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とする．階段関数を

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases}$$

として，以下の問に答えよ．

(1) a を正の定数として，関数 $f(t-a)u(t-a)$ のラプラス変換を $F(s)$ を用いて表せ．

(2) $y_1(t), y_2(t)$ に関する次の連立微分方程式をラプラス変換を用いて解け．

$$\begin{aligned} &y_1'(t) = -y_2(t) + 1 - u(t-1), \\ &y_2'(t) = \quad y_1(t) + 1 - u(t-1), \\ &y_1(0) = y_2(0) = 0. \end{aligned}$$

[6] n, k を $n \geq k$ なる自然数として，二項係数 $\binom{n}{k}$ について以下の問に答えよ．

(1) C を原点を内部に含む区分的に滑らかな単純閉路とするとき，

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} dz = \binom{n}{k}$$

を示せ．

(2) 不等式

$$\binom{2n}{n} \leq 4^n$$

を示せ．