九州大学大学院数理学府
2020 年度修士課程入学試験
基礎科目問題

注意
- 問題 [1][2][3][4] のすべてに解答せよ.
- 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1] A を次の 3 次正方行列とする.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

以下の問に答えよ.

(1) ${}^tPAP$ が対角行列となるような 3 次直交行列 P と ${}^tPAP$ を求めよ. ただし, 行列 X に対し, ${}^tX$ は X の転置行列を表す.

(2) 3 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ に対し,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_A = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}$$

とおく. $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上で定義された関数

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})_A}{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

の最大値と最小値を求めよ. ただし, $\mathbf{0}$ は零ベクトルを表す.

[2]　次の 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -8 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

に対し, $\mathbb{R}$ 上の 3 次元列ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

と定める. 以下の問に答えよ.

(1) $\mathbb{R}^3$ の 1 次元部分空間 V_1 で, $f(V_1) \subset V_1$ となるものをすべて求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の 2 次元部分空間 V_2 で, $f(V_2) \subset V_2$ となるものがただ一つ存在することを示し, その基底を与えよ.

(3) 自然数 n に対し, A^{6n} を求めよ.

[3] 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ が成り立つとする. 以下の問に答えよ.

(1) 部分和を $s_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n$ とする. 任意の自然数 N と任意の実数 r に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{n=1}^{N} a_n r^n = (1-r)\sum_{n=1}^{N} s_n r^n + s_N r^{N+1}$$

(2) $0 < r < 1$ なる任意の実数 r に対して, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ は収束し, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = (1-r)\sum_{n=1}^{\infty} s_n r^n$$

(3) $\displaystyle\lim_{r\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = 0$ を示せ.

[4]　平面 $\mathbb{R}^2$ の標準的な座標を (x, y) とする．正の実数 p に対して，$\mathbb{R}^2$ の部分集合 Ω_p を

$$\Omega_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^p + |y|^p \leq 1\}$$

で定め，次の 2 重積分を考える．

$$A_p = \iint_{\Omega_p} (x^2 + y^2)dxdy.$$

以下の問に答えよ．

(1) A_1 の値を求めよ．

(2) A_2 の値を求めよ．

(3) 極限 $\lim_{p \to \infty} A_p$ の値を求めよ．